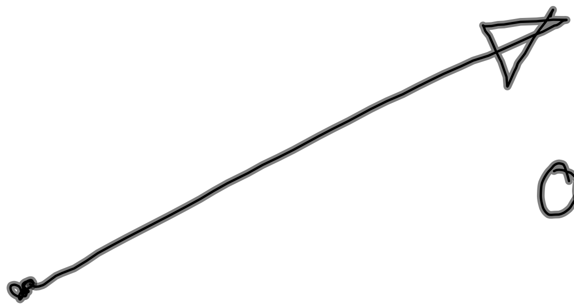
Vektorer

$\bar{u}$



längd och riktning

koordinater

Fortsätt räkna med vektorer med fler koordinater.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$$

nov 9-12:59

Vi kan tänka på
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ som
- punkt i $\mathbb{R}^n$
- vektor i $\mathbb{R}^n$ (ortsvektor)

nov 9-12:59

Viktigt med ordning

$$(1,2) \neq (2,1)$$

5 -10

2

4 oordnad mängd

3

1

nov 9-12:59

När vi ordnat kan vi addera komponentvis

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

nov 9-12:59

Nollvektorn

$$0 = \underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ st}} \in \mathbb{R}^n$$

nov 9-12:59

Skalärprodukt

Summan av produkterna
av koordinaterna (komponenterna)
ger skalärprodukt

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

nov 9-12:59

Summa av produkter i kalkyl-
blad.

= Sumproduct(;)

nov 9-13:20

Alltså skalärprodukt för löner

(fm lön, em lön, kv. lön, nattlön)

ex (200 kr/timme , 250 kr/timme , 300 kr/timme , 1000 kr/timme) $= \bar{u}$

$\bar{v}$ = (2 timmar , 1 timme , 2 timmar , 8 timmar)

nov 9-13:21

Medelbetyg

MaA	MVG	20	100
MaB	VG	15	50
MaC	MVG	20	100
MaD	VG	15	100
MaE	G	10	50

Skalärprodukt: $20 \cdot 100 + 15 \cdot 50 + 2 \cdot 100 + 15 \cdot 100 + 10 \cdot 50 =$

nov 9-13:24

Vi delar sedan med antal timmar.

nov 9-13:27

Längd: $|\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$

$$|(x_1, x_2, \ldots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

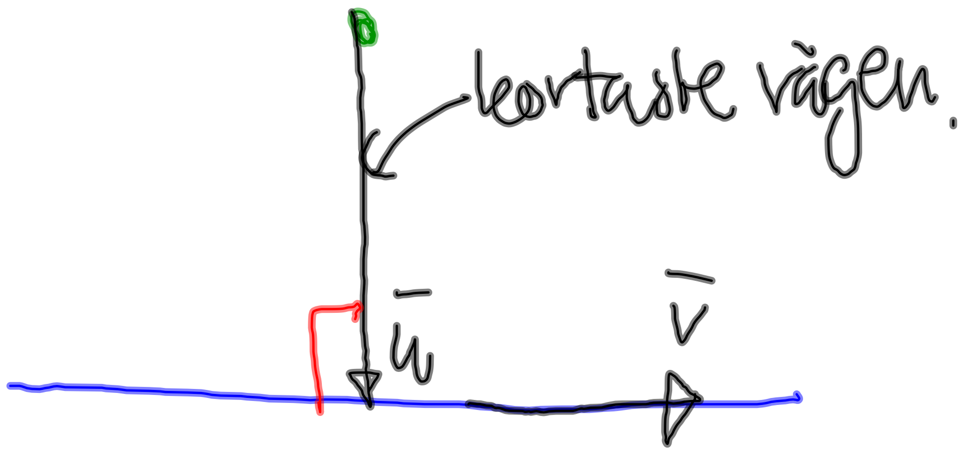
Alltså $|\bar{u}| = 0 \iff \bar{u} = 0$

Alla andra $\bar{u}$ har $|\bar{u}| > 0$.

nov 9-13:29

Vi bestämmer

$$\bar{u} \perp \bar{v} \iff \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$



nov 9-13:32

Cauchy-Schwartz

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$$

Alltså $-1 \leq \dfrac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|} \leq 1$

nov 9-13:36

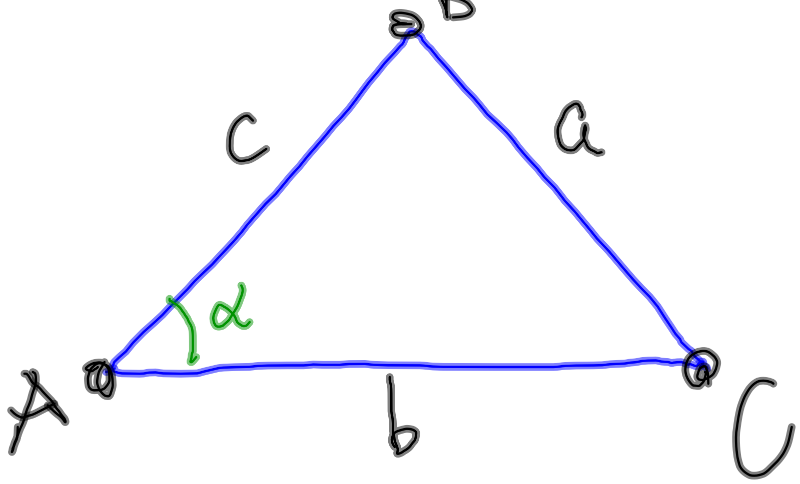
Alltså får vi naturligt

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

nov 9-13:38

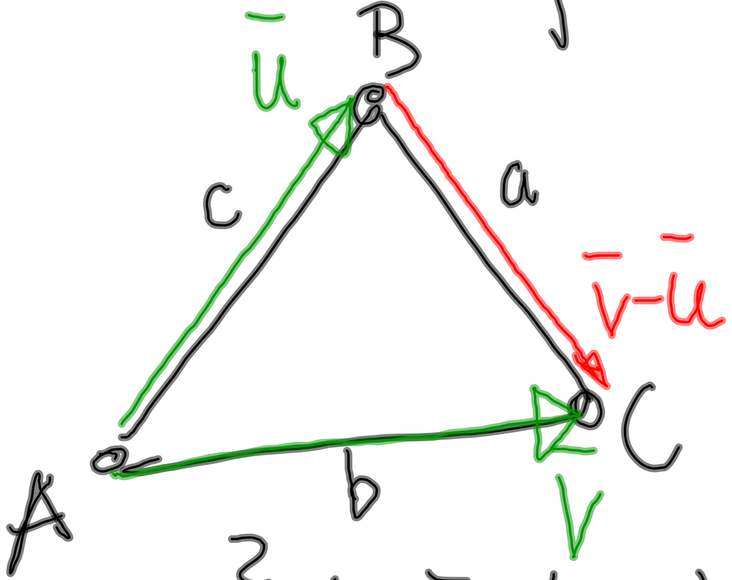
Kom ihåg: Cosinussatsen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$



nov 9-13:39

Lätt med skalärprodukt



$$a^2 = |\bar{v}-\bar{u}|^2 = (\bar{v}-\bar{u})\cdot(\bar{v}-\bar{u}) = \bar{v}\cdot\bar{v} - \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{u}$$

nov 9-13:41

$$= \bar{v} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{u} - 2\bar{u} \cdot \bar{v}$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\left(\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\alpha \right.$$

$$\left. = b \cdot c \cdot \cos\alpha \right)$$

nov 9-13:43

Linjärkombinationer;

$$ax + by + cz = d$$

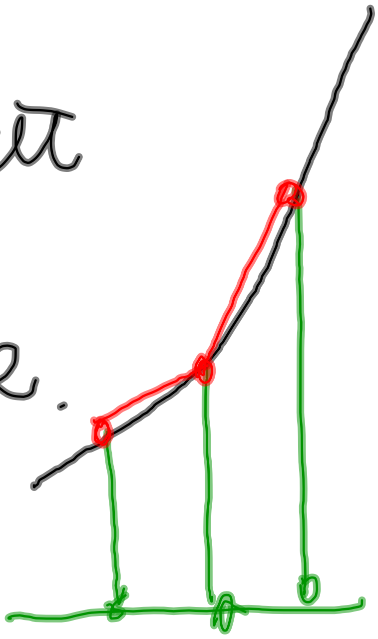
Vi kan se det som en linjär-
kombination av koord. (x, y, z)
med koefficienter (a, b, c).

nov 9-14:04

Ex: $(a,b,c) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z$ är ett viktat medelvärde.

(Ex trapetsmetod



nov 9-14:06

Matriser

radvektorer $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$

och

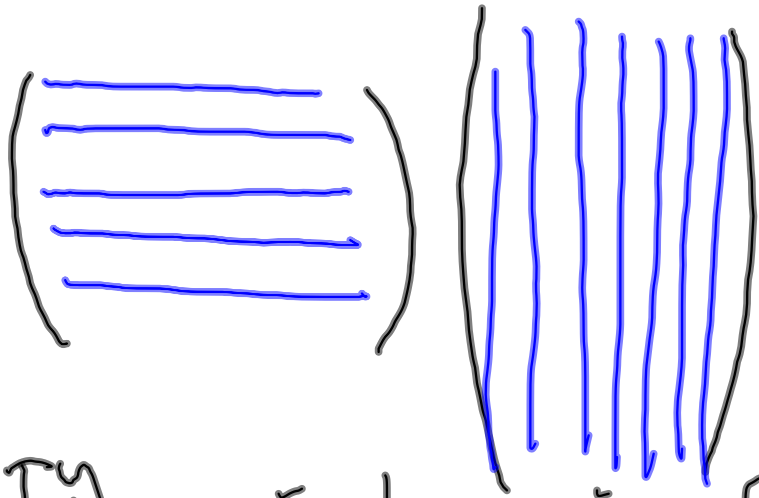
kolumnvektorer $\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ a_{2,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix}$

nov 9-14:13

Observera;

- radindex först
- radindex ökar nedåt.

nov 9-14:16



För varje korsning får vi ett tal $\bar{r}_i \cdot \bar{k}_j$

nov 9-14:17

Ex:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2}\cdot(-5)+\boxed{1}\cdot 4 \\ \boxed{3}\cdot(-5)+\boxed{4}\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -5\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{(linjärkomb.)}$$

nov 9-14:19

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (-5 \cdot 2 + 4 \cdot 3, -5 \cdot 1 + 4 \cdot 4)$$

$$= (2, 11)$$

$$= -5 \cdot (2, 1) + 4 (3, 4)$$

nov 9-14:22

Alltså; ( )( ) ger

linjärkombination av kolonnerna

( )( ) ger en

linjärkombination av raderna.

nov 9-14:25

Märk:

Det finns i allmänhet ingen division som motsvarar multiplikationen.

(Senare ska vi lära oss dividera med vissa kvadratiska matriser.)

nov 9-14:27

Obs! Måste ha lika många kolonner i A som rader i B.
(dvs lika långa rader i A som kolonner i B.)

nov 9-14:29

Ytterligare märklighet:

$$AB \neq BA$$

Ex: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nov 9-14:30

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nov 9-14:33